Листопад В.В.
Академія праці та соціальних відносин

Реалізація методу Жордана-Гауса з допомогою Ms Excel

Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь є одним із основних розділів як шкільної математики, так і багатьох курсів вузівських програм. Для розв'язування таких систем використовуються відомі в математиці методи – матричний, Крамера, Гауса, Жордана-Гауса. Найбільш зручним серед них є метод Жордана-Гауса, він дає змогу досліджувати на сумісність довільні системи алгебраїчних рівнянь та розв'язувати їх, знаходити ранг матриці, обернену матрицю [1-4], реалізовувати симплекс-метод та його модифікації при розв'язуванні екстремальних задач економічного змісту [5] тощо. При розв'язуванні довільних систем лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Жордана-Гауса потрібно послідовно зробити кілька кроків перетворення за певним правилом переходу від однієї розрахункової таблиці до іншої. Сутність цього методу полягає у покроковому виключенні невідомих із системи рівнянь. Оскільки кроки переходу є алгоритмічними процедурами, то метод Жордана-Гауса є простим у застосуванні та легко реалізується з допомогою Ms Excel.

В даній статті розкриємо сутність застосування електронних таблиць Ms Excel для розв'язання деяких задач з курсів вищої математики, математичного програмування та визначимо переваги реалізації даного методу над традиційними.

Розглянемо традиційний алгоритм кроку перетворення методу Жордана-Гауса [1-3]. Нехай задано систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1l}x_l + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2l}x_l + \ldots + a_{2j}x_4 + \ldots + a_{2n}x_5 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kl}x_l + \ldots + a_{kj}x_j + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{il}x_l + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ml}x_l + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Складаємо відповідну системі розрахункову таблицю.

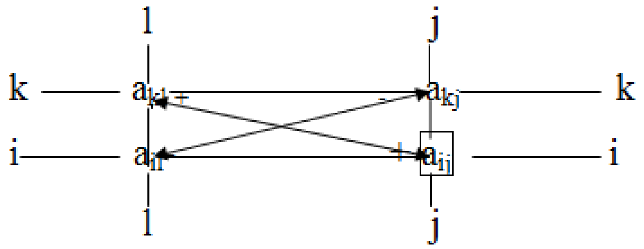
Базис	X_1	X_2	…	X_l	…	X_j	…	X_n	b_i	K
	a_{11}	a_{12}	…	a_{1l}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1	
	a_{21}	a_{22}	…	a_{2l}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2	
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
	a_{k1}	a_{k2}	…	a_{kl}	…	a_{kj}	…	a_{kn}	b_k	
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
	a_{i1}	a_{i2}		a_{il}	…	$\boxed{a_{ij}}$	…	a_{in}	b_i	
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
	a_{m1}	a_{m2}		a_{ml}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m	

Алгоритм переходу до наступної таблиці:

1. Обираємо розв'язувальний елемент $a_{lj} \neq 0$ (найкраще вибирати 1, якщо такий елемент є в таблиці);
2. Елементи і-го рядка (розв'язувального рядка) ділимо на a_{lj} і результат записуємо в і-ий рядок нової таблиці;
3. В розв'язувальному j-му стовпці нової таблиці замість a_{lj} пишемо одиницю, а замість інших елементів цього стовпця пишемо нулі;
4. Усі інші елементи наступної розрахункової таблиці, обчислюють за формулою:

$$a_{kl}^{(1)} = \frac{a_{ij} \cdot a_{kl} - a_{il} \cdot a_{kj}}{a_{ij}}, \; k = 1,2,\ldots,m; l = 1,2,\ldots,n; k \neq i, \; j \neq l. \qquad (1)$$

Обчислення елементів нової таблиці за формулою (1) доцільно виконувати з використанням схеми прямокутника



5. Правильність підрахунків перевіряють порівнянням елементів контрольного стовпця із сумою елементів відповідного рядка.

Розглянемо приклади, в яких використовується метод Жордана-Гауса та реалізація його в Ms Excel.

I. Застосування методу Жордана-Гауса для розв'язування систем лінійних рівнянь.

Приклад 1.Розв'язати систему лінійних рівнянь за методом Жордана-Гауса

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Розв'язування. Складемо початкову таблицю із коефіцієнтів системи

Базис	X1	X2	X3	Bi	K
	2	-4	3	1	2
	1	-2	4	3	6
	3	-1	-5	2	-1

Нехай розв'язувальним елементом буде $a_{21} = 1$, тоді в новій таблиці $a_{21}^{(1)} = 1$, а всі інші елементи першого (розв'язувального) стовпця рівні 0. В базис піде X_1 в другий рядок. Елементи розв'язувального рядка ділимо на a_{21} та записуємо в другий рядок нової таблиці. Всі інші елементи нової таблиці обчислимо користуючись формулою (1) та правилом прямокутника.

$$a_{12}^{(1)} = \frac{1\cdot(-4) - 2\cdot(-2)}{1} = 0, a_{13}^{(1)} = \frac{1\cdot 3 - 4\cdot 2}{1} = -5, b_1^{(1)} = \frac{1\cdot 1 - 2\cdot 3}{1} = -5, k_1^{(1)} = \frac{1\cdot 2 - 6\cdot 2}{1} = -10,$$

$$a_{32}^{(1)} = \frac{1\cdot(-1) - 3\cdot(-2)}{1} = 5, a_{33}^{(1)} = \frac{1\cdot(-5) - 4\cdot 3}{1} = -17, b_3^{(1)} = \frac{1\cdot 2 - 3\cdot 3}{1} = -7, k_3^{(1)} = \frac{1\cdot(-1) - 6\cdot 3}{1} = -19.$$

Отримаємо таблицю

Базис	X1	X2	X3	Bi	K
	0	0	-5	-5	-10
X1	1	-2	4	3	6
	0	5	-17	-7	-19

або розділивши перший рядок на (-5) маємо

Базис	X1	X2	X3	Bi	K
	0	0	1	1	2
X1	1	-2	4	3	6
	0	5	-17	-7	-19

Правильність обчислень при переході підтверджують рівність суми елементів відповідних рядків відповідним елементам контрольного стовпця.

Виберемо, в останній таблиці, за розв'язувальний елемент $a_{13}^{(1)} = 1$ (розв'язувальний стовпець 3), тому в новій таблиці $a_{13}^{(2)} = 1$, а всі інші елементи розв'язувального стовпця рівні 0. Перший стовпець в нову таблицю також переносимо без змін, тому що він відповідає базисному елементу X_1. Всі інші елементи нової таблиці знаходимо користуючись (1).

$$a_{22}^{(2)} = \frac{1\cdot(-2) - 0\cdot 4}{1} = -2, \ b_2^{(2)} = \frac{1\cdot 3 - 4\cdot 1}{1} = -1, \ k_2^{(2)} = \frac{1\cdot 6 - 4\cdot 2}{1} = -2,$$

$$a_{32}^{(2)} = \frac{1\cdot 5 - 0\cdot(-17)}{1} = 5, \ b_3^{(2)} = \frac{1\cdot(-7) - 1\cdot(-17)}{1} = 10, \ k_3^{(2)} = \frac{1\cdot(-19) - (-17)\cdot 2}{1} = 15.$$

Отримаємо наступну таблицю

Базис	X1	X2	X3	Bi	K
X3	0	0	1	1	2
X1	1	-2	0	-1	-2
	0	5	0	10	15

або розділивши третю строчку на 5 отримаємо

Базис	X1	X2	X3	Bi	K
X3	0	0	1	1	2
X1	1	-2	0	-1	-2
	0	1	0	2	3

Знаходимо суму отриманих елементів кожного рядка останньої таблиці та пересвідчимося в правильності переходу.

Виберемо розв'язувальний елемент $a_{22}^{(2)}=1$ та ввівши в базис третьої строчки X_2 виконаємо перехід до нової таблиці користуючись кроками 1)-4). Отримаємо

Базис	X1	X2	X3	Bi	K
X3	0	0	1	1	2
X1	1	0	0	3	4
X2	0	1	0	2	3

Отже, з останньої таблиці розв'язком системи є $X_1=3$, $X_2=2$, $X_3=1$.

Розв'яжемо розглянутий приклад користуючись електронними таблицями Ms Excel. Для цього складемо початкову розрахункову таблицю в якій не потрібен стовпець для контролю.

	A	B	C	D	E
1	Базис	X1	X2	X3	Bi
2		2	-4	3	1
3		1	-2	4	3
4		3	-1	-5	2

Виберемо розв'язувальний елемент $a_{21}=1$ (в базис піде X_1) та задамо формули переходу для елементів першого стовпця нової таблиці. При формуванні формул переходу обов'язково фіксуємо елементи розв'язувального стовпця (клавіша F4). B5=($B$3*B2-$B$2*B3)/$B$3; B6=B3/$B$3; B7=($B$3*B4-$B$4*B3)/$B$3 (В першій та третій формулах не обов'язково ділити на розв'язувальний елемент оскільки він дорівнює 1). Отримаємо $a_{11}^{(1)}=0,\ a_{21}^{(1)}=1,\ a_{31}^{(1)}=0$. Виділимо отримані результати та розповсюдимо задані формули на всі клітини нової таблиці. Якщо в стовпці, де знаходилася базисна змінна, отримано одиничний базисний вектор, то перехід виконано правильно.

5		0	0	-5	-5
6	X1	1	-2	4	3
7		0	5	-17	-7

Виберемо розв'язувальний елемент $a_{13}^{(1)}=-5$ (в базис піде X_3) та аналогічно задаємо формули переходу для елементів першого стовпця нової таблиці. B8=B5/$D$5; B9=($D$5*B6-$D$6*B5/$D$5; B10=($D$5*B7-$D$7*B5)/$D$5. Отримані формули розповсюдимо на всі клітини. Перехід виконано правильно, оскільки в стовпці D стоїть одиничний вектор.

	A	B	C	D	E
8	X3	0	0	1	1
9	X1	1	-2	0	-1
10		0	5	0	10

Розв'язувальним буде елемент $a_{32}^{(2)}=5$, тому в базис піде X_2. Формули для елементів першого стовпця останньої таблиці B11=($C$10*B8-$C$8*B10)/$C$10; B12=($C$10*B9-$C$9*B10)/$C$10, B13=B10/$C$10. Завершуємо процес розповсюдженням на всі клітини нової таблиці. Оскільки отримано всі базисні вектори, то в стовпці B_i ми маємо розв'язки системи.

	A	B	C	D	E
11	X3	0	0	1	1
12	X1	1	0	0	3
13	X2	0	1	0	2

Відповідь. $X_1=3$, $X_2=2$, $X_3=1$.

II. Дослідження на сумісність та розв'язування СЛР.

Приклад 2. Дослідити систему на сумісність за теоремою Кронекера-Капеллі та знайти розв'язок (якщо система сумісна):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо ранги звичайної A та розширеної $\overline{A}$ матриць

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

З останнього перетворення випливає, що rang(A)=3, а rang($\overline{A}$)=4. Оскільки rang (A)$\neq$rang($\overline{A}$) то система несумісна.

Зауваження 1. Такий самий результат можна отримати користуючись методом Жордана-Гауса з використанням Ms Excel.

Складемо спочатку відповідну заданій системі таблицю в Ms Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1	БАЗИС	X1	X2	X3	X4	X5	bi
2		1	1	3	-2	3	1
3		2	2	4	-1	3	2
4		3	3	5	-2	3	1
5		2	2	8	-3	9	2
6	X2	1	1	3	-2	3	1
7		0	0	-2	3	-3	0
8		0	0	-4	4	-6	-2
9		0	0	2	1	3	0

Виберемо розв'язувальний елемент (найкраще вибирати 1). Нехай це буде елемент $a_{12} = 1$ (C2=1) тому в базис піде X_2. Задамо формули переходу для елементів першого стовпця нової таблиці для усного підрахунку

$$a_{11}^{(1)} = \frac{a_{11}}{a_{12}}, a_{21}^{(1)} = \frac{a_{12} \cdot a_{21} - a_{22} \cdot a_{11}}{a_{12}}, a_{31}^{(1)} = \frac{a_{12} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{11}}{a_{12}}, a_{41}^{(1)} = \frac{a_{12} \cdot a_{41} - a_{24} \cdot a_{11}}{a_{12}}$$

та з допомогою Ms Excel таким чином, щоб можна їх розповсюдити на всі клітини (фіксуємо елементи розв'язувального стовпця). B6=B2/$C$2, B7=(B3*$C$2-$C$3*B2)/$C$2, B8=(B4*$C$2-$C$4*B2)/$C$2, B9=(B5*$C$2-$C$5*B2)/$C$2. Виділимо отримані елементи першого стовпця нової таблиці та розповсюдимо задані в них формули на всі клітини.

В отриманій таблиці вибираємо розв'язувальний елемент $a_{44}^{(1)} = 1$ (E9=1) тому в базис піде X_4. Задамо формули (тільки в Ms Excel) та виконаємо перехід до нової таблиці. B10=($E$9*B6-$E$6*B9)/$E$9, B11=($E$9*B7-$E$7*B9)/$E$9, B12=($E$9*B8-$E$8*B9)/$E$9, B13=B9/$E$9.

Виділимо отримані формули першого стовпця та розповсюдивши їх на всі клітини завершимо перехід до нової таблиці.

	A	B	C	D	E	F	G
10	X2	1	1	7	0	9	1
11		0	0	-8	0	-12	0
12		0	0	-12	0	-18	-2
13	X4	0	0	2	1	3	0

В отриманій таблиці вибираємо розв'язувальний елемент $a_{33}^{(2)} = -12$

(D12=-12) тому в базис піде X_3. Задамо формули та виконаємо перехід до нової таблиці. B14=($D$12*B10-$D$14*B12)/$D$12, B15=($D$12*B11-$D$11*B12)/$D$12, B16=B12/$D$12, B17=($D$12*B13-$D$13*B12)/$D$12.

	A	B	C	D	E	F	G
14	X2	1	1	0	0	-1,5	- 1/6
15		0	0	0	0	0	1 1/3
16	X3	0	0	1	0	1,5	1/6
17	X4	0	0	0	1	0	- 1/3

Оскільки в останній таблиці з другого рівняння (другий рядок) слідує, що 0=4/3, то система не має розв'язків.

Зауваження 2. В наступних прикладах окремо проводити дослідження на сумісність не будемо, так як відповідь на це запитання дає покрокова реалізація методу Жордана-Гауса.

Приклад 3. Розв’язати систему лінійних рівнянь за методом Жордана-Гауса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

Розв’язання. Оскільки ми маємо в системі чотири рівняння, то базис даного простору складатиметься із чотирьох лінійно-незалежних векторів. Тому розв’язків може бути не більше ніж $C_5^4 = C_5^1 = 5$. Побудуємо початкову таблицю та за методом Жордана-Гауса отримаємо всі загальні розв’язки.

	A	B	C	D	E	F	G
1	БАЗИС	X1	X2	X3	X4	X5	bi
2		2	-1	1	2	3	2
3		6	-1	2	4	5	3
4		6	-3	4	8	13	9
5		4	-2	1	1	2	1
6	X3	2	-1	1	2	3	2
7		2	1	0	0	-1	-1
8		-2	1	0	0	1	1
9		2	-1	0	-1	-1	-1
10	X3	4	0	1	2	2	1
11	X2	2	1	0	0	-1	-1
12		-4	0	0	0	2	2
13		4	0	0	-1	-2	-2
14	X3	12	0	1	0	-2	-3
15	X2	2	1	0	0	-1	-1
16		-4	0	0	0	2	2
17	X4	-4	0	0	1	2	2
18	X3	8	0	1	0	0	-1
19	X2	0	1	0	0	0	0
20	X5	-2	0	0	0	1	1
21	X4	0	0	0	1	0	0

З останньої таблиці перший загальний розв’язок

$$\begin{cases} x_3 = -1 - 8x_1, \\ x_2 = 0, \\ x_5 = 1 + 2x_1, \\ x_4 = 0, x_1 \in R, \end{cases}$$

Виберемо розв’язувальний елемент B20=-2 і введемо в базис X_1 замість X_5. Отримаємо

	A	B	C	D	E	F	G
22	X3	0	0	1	0	4	3
23	X2	0	1	0	0	0	0
24	X1	1	0	0	0	-0,5	-0,5
25	X4	0	0	0	1	0	0

З отриманої таблиці другий загальний розв’язок

$$\begin{cases} x_3 = 3 - 4x_5, \\ x_2 = 0, \\ x_1 = -0{,}5 + 0{,}5x_5, \\ x_4 = 0, x_5 \in R, \end{cases}$$

Вибираючи за розв’язувальний F22=4, отримаємо третій загальний розв’язок.

	A	B	C	D	E	F	G
26	X5	0	0	0,25	0	1	0,75
27	X2	0	1	0	0	0	0
28	X1	1	0	0,125	0	0	-0,125
29	X4	0	0	0	1	0	0

$$\begin{cases} x_5 = 0{,}75 - 4x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_1 = -0{,}125 - 0{,}125x_3, \\ x_4 = 0,\ x_3 \in R. \end{cases}$$ Інших розв’язків система немає.

III. Знаходження оберненої матриці.

Для знаходження оберненої матриці скористаємося теоремою [4, с.91].

Теорема. Якщо до одиничної матриці n-го порядку застосувати ті ж елементарні перетворення тільки над рядками і в тому ж порядку з допомогою яких не вироджена квадратна матриця A порядку n зводиться до одиничної, то отримана при цьому матриця буде оберненою до матриці A.

При проведенні перетворень із рядками матриці A і E записують поруч відділяючи їх вертикальною рискою. Тобто

$$(A\,|\,E) \to (E\,|\,A^{-1}) \qquad (2).$$

Цей метод називають методом Жордана.

Зауваження 3. Попередня теорема правильна, якщо перетворення проводити над стовпцями, але матриці A і E мають бути розташовані в стовпець. Тобто $\left(\dfrac{A}{E}\right) \to \left(\dfrac{E}{A^{-1}}\right)$.

Приклад 4. Знайти обернену матрицю до матриці A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв’язання. Обчислимо визначник матриці (функція МОПРЕД)

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$, отже обернена матриця існує.

Знайдемо її, користуючись методом Жордана.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			A			E		
2	2	1	0	0	1	0	0	0
3	3	2	0	0	0	1	0	0
4	1	1	3	4	0	0	1	0
5	2	-1	2	3	0	0	0	1
6								
7	1	0,5	0	0	0,5	0	0	0
8	0	0,5	0	0	-1,5	1	0	0
9	0	0,5	3	4	-0,5	0	1	0
10	0	-2	2	3	-1	0	0	1
11								
12	1	0	0	0	2	-1	0	0
13	0	1	0	0	-3	2	0	0
14	0	0	3	4	1	-1	1	0
15	0	0	2	3	-7	4	0	1
16								
17	1	0	0	0	2	-1	0	0
18	0	1	0	0	-3	2	0	0
19	0	0	1	1 1/3	1/3	- 1/3	1/3	0
20	0	0	0	1/3	-7 2/3	4 2/3	- 2/3	1
21								
22	1	0	0	0	2	-1	0	0
23	0	1	0	0	-3	2	0	0
24	0	0	1	0	31	-19	3	-4
25	0	0	0	1	-23	14	-2	3
			E			A^{-1}		

Випишемо кроки переходу від однієї таблиці до іншої.

1) Розв’язувальний елемент A_2=2. A7=A2/$A$2, A8=($A$2*A3-$A$3*A2)/$A$2, A9=($A$2*A4-$A$4*A2)/$A$2, A10=($A$2*A5-$A$5*A2)/$A$2;

2) Розв'язувальний елемент B_8=0,5. A12=($B$8*F7-$B$7*A8)/$B$8, A13=A8/$B$8, A14=($B$8*A9-$B$9*A8)/$B$8, A15=($B$8*A10-$B$10*A8)/$B$8;
3) Розв'язувальний елемент C_{14}=3. A17=($C$14*A12-$C$12*A14)/$C$14, A18=($C$14*A13-$C$13*A14)/$C$14, A19=A14/$C$14, A20=($C$14*A15-$C$15*A14)/$C$14.
4) Розв'язувальний елемент $D_{20}=1/3$. A22=($D$20*A17-$D$17*A20/$D$20, A23=($D$20*A18-$D$18*A20)/$D$20, A24=($D$20*A19-$D$19*A20)/$D$20, A25=A20/$D$20.

Отже виконавши чотири кроки жорданових виключень, отримали зліва одиничну матрицю E, а праворуч – обернену $\boxed{A^{-1}}$.

Тому $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Перевірку виконаємо множенням (оператор МУМНОЖ).

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Зауваження 4. Якщо у вказаній теоремі на місце одиничної матриці справа від вертикальної риски поставити матрицю B (матриця-стовпець СЛР) то в результаті зведення матриці A до одиничної справа отримаємо матрицю $A^{-1}\cdot B$, в якій знаходиться розв'язок заданої системи.

Тобто $\left[A|B\right]\to\left[E\middle|A^{-1}\cdot B\right]$, аналогічно для перетворень із стовпцями отримуємо $\left[\frac{A}{B}\right]\to\left[\frac{E}{A^{-1}\cdot B}\right]$.
Тому процес знаходження оберненої матриці використовується для розв'язування матричних рівнянь виду $A\cdot X=B$, або для реалізації матричного методу розв'язування систем лінійних рівнянь.

Приклад 5. Розв'язати систему лінійних рівнянь за методом Жордана

$$\begin{cases} x_2-3x_3+4x_4=-5 \\ x_1-2x_3+3x_4=-4 \\ 3x_1+2x_2-5x_4=12 \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5 \end{cases}$$

Розв'язування. Випишемо матриці A та B.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Оскільки в матриці A всі елементи головної діагоналі рівні нулю, то поміняємо перше та друге рівняння місцями, тому що потрібно, утворюючи одиничну матрицю, вибирати розв'язувальні елементи на головній діагоналі. Отримаємо $\begin{cases} x_1-2x_3+3x_4=-4 \\ x_2-3x_3+4x_4=-5 \\ 3x_1+2x_2-5x_4=12 \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5 \end{cases}$,

а матриці A і B

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Складемо розрахункові таблиці в Ms Excel

	A	B	C	D	E	F
1	БАЗИС	X1	X2	X3	X4	Bi
2		0	1	-3	4	-5
3		1	0	0	3	-4
4		3	2	0	-5	12
5		4	3	-5	0	5
6		1	0	0	3	-4
7		0	1	-3	4	-5
8		3	2	0	-5	12
9		4	3	-5	0	5
10	X1	1	0	0	3	-4
11		0	1	-3	4	-5
12		0	2	0	-14	24
13		0	3	-5	-12	21
14	X1	1	0	0	3	-4
15	X2	0	1	-3	4	-5
16		0	0	6	-22	34
17		0	0	1	-6	9
18	X1	1	0	0	3	-4
19	X2	0	1	0	-14	22
20		0	0	0	14	-20
21	X3	0	0	1	-6	9
22	X1	1	0	0	0	2/7
23	X2	0	1	0	0	2
24	X4	0	0	0	1	-1 3/7
25	X3	0	0	1	0	3/7
			E			$A^{-1}\cdot B$

1) Переставляємо місцями перше та друге рівняння;
2) Розв'язувальний елемент B6=1, тому в базис піде X1. Формули переходу для першого стовпця нової таблиці. B10=B6/$B$6, B11=$B$6*B7-$B$7*B6, B12=$B$6*B8-$B$8*B6, B13=$B$6*B9-$B$9*B6;
3) Розв'язувальний елемент C11=1, тому в базис піде X2. Задамо формули переходу для першого стовпця нової таблиці. B14=$C$11*B10-$C$10*B11, B15=B11/$C$11, B16=$C$11*B12-$C$12*B11, B17=$C$11*B13-$C$13*B11;
4) Розв'язувальний елемент D17=1, тому в базис піде X3. Формули переходу B18=$D$17*B14-$D$14*B17, B19=$D$17*B15-$D$15*B17, B20=$D$17*B16-$D$16*B17, B21=B17/D17$;
5) Розв'язувальний елемент E20=14, тому в базис піде X3. Формули переходу B22=($E$20*B18-$E$18*B20)/$E$20; B23=($E$20*B19-$E$19*B20)/$E$20, B24=B20/$E$20, B25=($E$20*B21-$E$21*B20)/$E$20.

Після чотирьох кроків жорданових виключень отримали зліва матрицю E, а справа матрицю-стовпець $A^{-1}\cdot B$, в якій знаходяться розв'язки системи. Випишемо їх, користуючись рядками останньої таблиці. $X_1=\frac{2}{7}, X_2=2, X_3=\frac{3}{7}, X_4=-1\frac{3}{7}$.

IV. Розклад вектора за базисом.

Базисом n-вимірного лінійного простору R^n називається система $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ n лінійно-незалежних векторів. Будь-який вектор цього простору можна розкласти за базисом. Тобто для будь-якого вектора $\vec{b}\in R^n$ знайдуться числа $x_1,x_2,\dots,x_n$ (з яких принаймні одне відмінне від нуля) такі, що $\vec{b}=\vec{a}_1\cdot x_1+\vec{a}_2\cdot x_2+\dots+\vec{a}_n\cdot x_n$. Останній вираз і є розкладом вектора $\vec{b}$ за базисом $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$.

Приклад 6. Показати, що вектори $\vec{a}=(1;-4;-1;2)$, $\vec{a}_2=(4;5;2;-1)$, $\vec{a}_3=(2;3;1;1)$, $\vec{a}_4=(1;2;1;4)$ утворюють базис і за методом Жордана-Гауса знайти розклад вектора $\vec{b}=(3;0-3;-6)$ за цим базисом.

Розв'язання. Якщо визначник складений з координат векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ відмінний від нуля, то вони будуть лінійно-незалежними і утворюватимуть базис простору R^4. В протилежному випадку – ні.

Складемо визначник (координати векторів записуватимемо в стовпець) та обчислимо його (функція МОПРЕД).

$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 4 & 2 & 1\\ -4 & 5 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 4\end{vmatrix}=-24\neq 0$, тому вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ утворюють базис. Знайдемо розклад вектора $\vec{b}=(3;0-3;-6)$ за цим базисом. Нехай $\vec{b}=\vec{a}_1\cdot x_1+\vec{a}_2\cdot x_2+\vec{a}_3\cdot x_3+\vec{a}_4\cdot x_4$ розкладається за базисом $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ – де x_1,x_2,x_3,x_4 – невідомі коефіцієнти. Запишемо даний розклад в координатному вигляді та складемо відповідну систему рівнянь.

$$\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot x_1+\begin{pmatrix}4\\5\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot x_2+\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}\cdot x_3+\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix}\cdot x_4=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\\-6\end{pmatrix},\quad \begin{cases}x_1+4x_2+2x_3+x_4=3,\\ -4x_1+5x_2+3x_3+2x_4=0,\\ -x_1+2x_2+x_3+x_4=-3,\\ 2x_1-x_2+x_3+4x_4=-6.\end{cases}$$

Складемо відповідну таблицю, та виконуючи послідовно кроки перетворення за методом Жордана-Гауса, отримаємо невідомі коефіцієнти розкладу.

	A	B	C	D	E	F
1	БАЗИС	X1	X2	X3	X4	Bi
2		1	4	2	1	3
3		-4	5	3	2	0
4		-1	2	1	1	-3
5		2	-1	1	4	6
6	X1	1	4	2	1	3
7		0	21	11	6	12
8		0	6	3	2	0
9		0	-9	-3	2	0
10	X1	1	1	0,5	0	3
11		0	3	2	0	12
12	X4	0	3	1,5	1	0
13		0	-15	-6	0	0
14	X1	1	0,25	0	0	0
15	X3	0	1,5	1	0	6
16	X4	0	0,75	0	1	-9
17		0	-6	0	0	36
18	X1	1	0	0	0	1,5
19	X3	0	0	1	0	15
20	X4	0	0	0	1	-4,5
21	X2	0	1	0	0	-6

Розпишемо кроки переходу від однієї таблиці до іншої.

1) Розв'язувальний елемент B2=1, тому в базис піде X1. Формули переходу для першого стовпця нової таблиці. B6=B2/$B$2, B7=$B$2*B3-$B$3*B2, B8=$B$2*B4-$B$4*B2, B9=$B$2*B5-$B$5*B2.

2) Розв'язувальний елемент E8=2, тому в базис піде X4. Формули переходу для першого стовпця нової таблиці. B10=($E$8*B6-$E$6*B8)/$E$8, B11=$E$8*B7-$E$7*B8)/$E$8, B12=B8/$E$8, B13=($E$8*B9-$E$9*B8)/$E$8.

3) Розв'язувальний елемент D11=2, тому в базис піде X3. Формули переходу для першого стовпця нової таблиці. B14=($D$11*B10-$D$10*B11)/$D$11, B15=B11/$D$11, B16=($D$11*B12-$D$12*B11)/$D$11, B17=($D$11*B13-$D$13*B11)/$D$11.

4) Розв'язувальний елемент C17=-6, тому в базис піде X2. Формули переходу для першого стовпця нової таблиці. B18=($C$17*B14-$C$14*B17)/$C$17, B19=($C$17*B15-$C$15*B17)/$C$17, B20=($C$17*B16-$C$16*B17)/$C$17, B21=B17/$C$17.

Отже з останньої таблиці $x_1=1{,}5,\ x_2=-6,\ x_3=15,\ x_4=-4{,}5$ та розклад вектора $\vec{b}=1{,}5\vec{a}_1-6\vec{a}_2+15\vec{a}_3-4{,}5\vec{a}_4$.

V. Застосування методу Жордана-Гауса в задачах економіки.

В економічних дослідженнях для визначення ефективності виробництва досить часто застосовується симплекс-метод, який базується на Жорданових виключеннях [5].

Приклад 7. Задача оптимального виробничого планування. Фірма випускає чотири види продукції A, B, C і D, на виробництво якої витрачає три види ресурсів (наприклад: працю, сировину та обладнання), які вона має в обмеженій кількості. Норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції, їх наявні запаси, а також ціна реалізації одиниці продукції наведені в таблиці:

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції				Запаси ресурсів
	A	B	C	D	
1	4	2	2	3	210
2	1	1	2	3	180
3	3	1	2	1	240
Ціна	15	10	15	11	

Математична модель задачі в канонічній формі має вигляд:

$$F = 15x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 11x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 210, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 180, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_7 = 240, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,7}).$$

Економічна інтерпретація прямої задачі.

Для виробництва чотирьох видів продукції A, B, C, та D використовують три види ресурсів. Відомі наявні запаси ресурсів 210, 180 та 240 од. для 1, 2 та 3-го ресурсу відповідно, а також норми витрат кожного ресурсу для виготовлення продукції A, B, C, та D та ціна реалізації (в останній строчці) відповідно. Необхідно знайти такий план випуску продукції $X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, при якому виручка від реалізації продукції буде максимальною, а витрати ресурсів не перевищуватимуть їх наявних запасів.

Розв'яжемо задачу симплекс-методом, користуючись засобами MS Excel. Запишемо всі дані в симплекс-таблицю та виконаємо перехід до наступної таблиці за допомогою кроку симплекс-методу.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				15	10	15	11	0	0	0	
2	БАЗИС	Сібаз	Хібаз	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	θі
3	←X5	0	210	4	2	2	3	1	0	0	52,5
4	X6	0	180	1	1	2	3	0	1	0	180
5	X7	0	240	3	1	2	1	0	0	1	80
6	Δj=Zj-Cj		0	↑-15	-10	-15	-11	0	0	0	

Максимальне за модулем $|\Delta_j| = |z_j - c_j| = 15$, тому до базису включимо змінну X_1 (можна включати X_3). Отже перший стовпець є напрямним. В комірці K3 задамо формулу для обчислення $\theta_1 = C3/D3$. Отримаємо θ_1=52,5. Розповсюдимо дану формулу на клітини K4 та K5. Отримаємо $\min\{52{,}5; 180; 80\} = 52{,}5$, тому напрямним є перший рядок, а розв'язувальний елемент таблиці a_{11}=4. Переходимо до наступної таблиці. Для цього задаємо формули для визначення елементів стовпця $X_{iбаз}$ таким чином, щоб розповсюдити їх на всі клітини нової таблиці. В клітині C7 створюємо формулу $a_{01}^{(1)} = C3/\$D\$3$. Елемент клітини D3 зафіксували клавішею F4. Отримали 52,5. Нагадаємо, що перехід для обчислення інших елементів наступної таблиці, здійснюється за правилом прямокутника.

Для комірки C8 формула переходу матиме вигляд:

$$a_{02}^{(1)} = \frac{a_{11} \cdot a_{02} - a_{21} \cdot a_{01}}{a_{11}},$$

а для комп'ютерної реазації C8=($D$3*C4-$D$4*C3)/$D$3. Створюємо формулу для елемента $a_{03}^{(1)}$ нової таблиці C9=($D$3*C5-$D$5*C3)/$D$3. Виділяємо утворений стовпець та розповсюджуємо формулу (вправо) на всю таблицю. Таким чином перехід до нової таблиці за допомогою симплекс-методу виконано. Якщо перехід виконано правильно, то в напрямному стовпці нової таблиці отримаємо базисний вектор $a_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Знайдемо елементи останнього рядка. Створимо формулу у клітині C10. C10=СУММПРОИЗВ($B$7:$B$9;C7:C9). Розповсюдимо її на клітину D10 та доповнимо – D1. Отримали формулу, яку розповсюдимо на всі клітини і цим завершено перший крок та отримаємо нову таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
				15	10	15	11	0	0	0	
	БАЗИС	Сіваз	Хіваз	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	θi
7	X1	15	52,5	1	0,5	0,5	0,75	0,25	0	0	105
8	← X6	0	127,5	0	0,5	1,5	2,25	-0,25	1	0	85
9	X7	0	82,5	0	-0,5	0,5	-1,25	-0,75	0	1	165
10	Δj=Zj-Cj		787,5	0	-2,5	↑-7,5	0,25	3,75	0	0	

З останньої таблиці, оскільки $\max\{|-2{,}5|;|-7{,}5|\}=7{,}5$ то стовпчик із змінною X_3 є напрямним і X_3 піде в базис замість X_6. Знаходимо θ_1: K7:=C7/F7. Розповсюдимо формулу (вниз) на інші дві клітини. Оскільки $\theta_2=\min\{105;85;165\}=85$ то другий рядок є напрямним, а розв'язувальний елемент $a_{23}^{(1)}=1{,}5$. Створюємо формули для переходу у стовпці С:

C11= $a_{01}^{(2)}$ =($F$8*C7-$F$7*C8)/$F$8;   C12= $a_{02}^{(2)}$ =C8/$F$8;   C13= $a_{03}^{(2)}$ =($F$8*C9-$F$9*C8)/$F$8. Виділяємо утворені в стовпці С формули та розповсюджуємо їх на всі клітини таблиці і завершуємо перехід створенням формули в останньому рядку. В результаті отримаємо таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
				15	10	15	11	0	0	0	
	БАЗИС	Сіваз	Хіваз	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	θi
11	←X1	15	10	1	1/3	0	0	1/3	- 1/3	0	30
12	X3	15	85	0	1/3	1	1,5	- 1/6	2/3	0	255
13	X7	0	40	0	- 2/3	0	-2	- 2/3	- 1/3	1	
14	Δj=Zj-Cj		1425	0	↑ 0	0	11,5	2,5	5	0	

Оскільки всі оцінки в останньому рядку третьої таблиці невід'ємні, то це означає, що отриманий розв'язок оптимальний $F_{\max}=1425$ і $X_{опт}^{(1)}=$ (10;0;85;0;0;0;40). Оскільки оцінка в останньому рядку для змінної X_2 дорівнює нулю та їй відповідає небазисний стовпець, то це означає, що існує альтернативний розв'язок. Знайдемо θ_i, користуючись напрямним стовпцем X_2. $\theta_1=30$, $\theta_2=255$. θ_1 min тому напрямним буде перший рядок (розв'язувальний елемент $a_{12}^{(2)}=\frac{1}{3}$).

Задамо формули для елементів першого стовпця та перейдемо до наступної симплекс-таблиці:

C15= $a_{01}^{(3)}$ =C11/$E$11;   C16= $a_{02}^{(3)}$ =($E$11*C12-$E$12*C11)/$E$11;   C17= $a_{03}^{(3)}$ =($E$11*C13-$E$13*C11)/$E$11; C18=СУММПРОИЗВ($B$15:$B$17;C15:C17). Отримаємо:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
				15	10	15	11	0	0	0
	БАЗИС	Сіваз	Хіваз	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
15	X2	10	30	3	1	0	0	1	-1	0
16	X3	15	75	-1	0	1	5,5	-0,5	1	0
17	X7	0	60	2	0	0	-2	0	-1	1
18	Δj=Zj-Cj		1425	0	0	0	11,5	2,5	5	0

З цієї таблиці отримаємо другий оптимальний розв'язок: $X_{опт}^{(2)}$ ==(0;30;75;0;0;0;60). В нижніх рядках останніх двох таблиць (стопці X_5, X_6, X_7) оптимальний розв'язок двоїстої задачі $Y_{опт}$=(2,5;5;0) і $Y_{\min}=F_{\max}=$ 1425, за першою теоремою двоїстості.

Проведемо економічний аналіз першого оптимального плану (Для другого аналогічно).

X_1=10 – означає, що продукція А випускається в кількості 10 одиниць;

X_2=0 – означає, що продукція В не випускається;

X_3=85 – означає, що продукція С випускається в кількості 85 одиниць;

X_4=0 – означає, що продукція D не випускається;

X_5=0 – означає, що ресурс 1 використовується повністю;

X_6=0 – означає, що ресурс 2 використовується повністю;

X_7=40 – означає, що ресурс 3 використовується частково, утворюючи залишок у розмірі 40 од.

Отже за допомогою засобів Microsoft Excel можна отримати повний розв'язок оптимізаційної задачі лінійного програмування, а також двоїстої задачі, що дає змогу проводити економічний аналіз та шукати додаткові характеристики.

Переваги застосування електронних таблиць Ms Excel при реалізації методу Жордана-Гауса на заняттях з вищої математики та лінійного програмування:

1. Процес розв'язування займає лічені хвилини в порівнянні з ручним підрахунком.
2. Паралельно добре засвоюється теоретичний матеріал.
3. Виробляються:
   - навички реалізації алгоритмічних процедур;
   - вміння формулювати навчальну задачу, планувати діяльність щодо її розв'язання;
   - вміння добирати та використовувати готові програмні засоби (математичні пакети прикладних програм);
   - вміння складати програми для розв'язування типових навчальних задач;
   - навички володіння основами логічного програмування;
   - вміння добирати ефективний метод для розв'язування поставленої задачі.

4. Можна за досить короткий час скласти систему контрольних завдань для проведення тематичного та підсумкового контролю.

5. Досить великий спектр застосування в методах розв'язування задач лінійного програмування.

Література

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів – Київ: ЦУЛ, 2002. – 400 с.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для сам ост. Вивч. дисц. / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова, О.І. Лютий та ін. – Вид. 2-ге перероб. і доп. – К.: КНЕУ, 2002. – 606 с.
3. Жалдак М.І., Рамський Ю.С. Чисельні методи математики: Посібник для самоосвіти вчителів. – К.: Рад. шк., 1984. – 206 с.
4. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике: Справ. – Мн.: Наука і техніка, 1991. – 480 с.
5. Листопад В.В.Реалізація симплекс-методу для розв'язання економічних задач оптимізації з допомогою Microsoft Excel. // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. – Випуск 19: збірник наукових праць/ за ред. В.Д.Сиротюка. – К.: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. – с. 211-216.